



TITLE:

渦運動力学の基礎(講義ノート)

AUTHOR(S):

大木谷, 耕司

CITATION:

大木谷, 耕司. 渦運動力学の基礎(講義ノート). 物性研究 2004, 82(3): 391-428

ISSUE DATE:

2004-06-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/97826>

RIGHT:

講義ノート

渦運動力学の基礎

京都大学数理解析研究所 大木谷 耕司

(2004 年 3 月 31 日受理)

目次

1	序	392
1.1	Kolmogorov 理論	392
1.2	Onsager 予想	394
2	渦力学の基礎	396
2.1	インパルスによる定式化	396
2.2	Kuz'min-Oseledets 変数	398
2.3	インパルス形式の歴史	401
3	Cauchy-Weber 公式の粘性流体への拡張	402
3.1	加法的な拡張	402
3.2	乗法的な拡張: Euler-Lagrange 定式化	403
4	流体方程式の爆発の問題 (3 次元)	406
4.1	Beale-Kato-Majda 基準	406
4.2	渦度ベクトルの向き	407
4.3	計算例	409
5	流体方程式の爆発の問題 (2 次元)	414
5.1	Euler 方程式	414
5.2	磁気流体力学方程式 (MHD)	415
5.3	Boussinesq 方程式	416
5.4	準地衡近似方程式	417
5.5	ストレッチ解	417
6	Cordoba-Fefferman の理論	419
6.1	2 次元アクティブスカラー	420
6.2	渦管のシナリオ	424
7	付記	424

乱流現象を流体方程式の解の特異性と関連づける可能性は、認識されて久しい。これは流体力学の長い歴史の中でも、理論的な進歩の緩慢さと言う点では際だっているテーマの1つである。ここでは nonlocality (非局所性), 非線型性の逓減 (nonlinearity depletion) という問題点、あるいは困難さを再認識することで、今後の発展の基礎を与えることを目指す¹。

講義の2つの柱は、特異性研究の一定式化として最近進展がある、Euler-Lagrange 定式化の紹介と、数学的に現在までに知られている特異点形成に関する拘束条件の概観である。

Euler-Lagrange 定式化の基礎となる定式化にも重点をおき、従来いろいろな文献に散見されていた理論の交通整理を行う。数学的な結果から、物理理論にも有用であると思われるものをピックアップする。

1 序

1.1 Kolmogorov 理論

標準的な記号で Navier-Stokes 方程式は以下の様にかける。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{u}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

ここで境界条件としては 全空間の場合、遠方で静止 $\mathbf{u} = 0$ あるいは、数値実験の場合は周期境界条件を用いる。また、初期条件は滑らかな速度場を与える：

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t = 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}).$$

全運動エネルギーは以下の様に変化する：

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right\rangle = -\nu \langle |\boldsymbol{\omega}|^2 \rangle.$$

ここで、 $\langle \rangle$ は空間平均を表す。よって、エネルギー散逸率 $\epsilon(t)$ は

$$\epsilon(t) \equiv \nu \langle |\boldsymbol{\omega}|^2 \rangle$$

となる。Kolmogorov 理論の重要な仮定は、 ν が小さくても、しばらく時間が経つと、 $\epsilon(t)$ は有意の値（つまり、ゼロではない）をとる、という観察である。

¹この原稿は平成14年度後期に九州大学応用力学研究所、金沢大学理学部において行った集中講義のノートに加筆したものである。

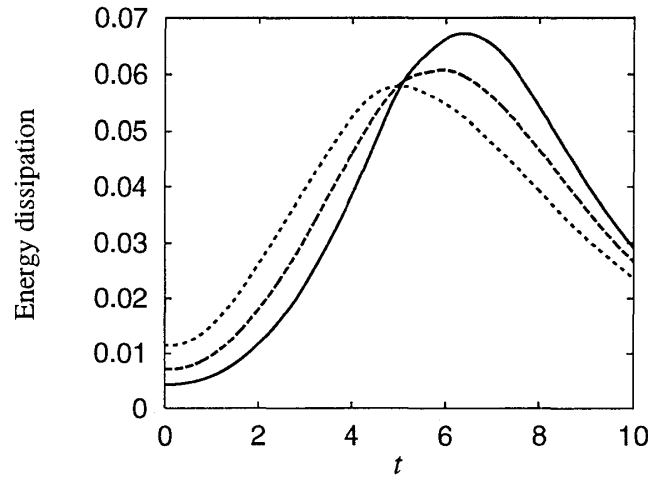


図 1: エネルギー散逸率

つまり、レイノルズ数 R がいくら大きくても、ある程度時間 $T_c(R)$ が経てば

$$\epsilon(t) \equiv \nu \langle |\boldsymbol{\omega}|^2 \rangle = O(1) \quad (3)$$

となる、という仮定である。もっともこれは経験法則であり、数学的な証明はないが、数値実験からはある程度、これを支持する結果が得られている。図 1 は、一様等方性減衰乱流の計算におけるエネルギー散逸率の時間発展の例である。初期エネルギースペクトルとして

$$E(k) \propto k^2 \exp(-k^2)$$

を持つ、ランダムな初期条件から、発展する Navier-Stokes 方程式を $\nu = 4 \times 10^{-3}$, 2.5×10^{-3} , 1.5×10^{-3} という、3 つの動粘性率を用いて計算した。粘性率を 2.7 倍変化させたときエネルギー散逸率のピーク値は 15 % ほどしか変化していない。

これを認めれば、 ϵ と ν が独立なパラメータとなる。さらに、局所一様等方性、局所相似性の仮定を援用すると、いわゆる Kolmogorov 理論が導出される。特に、速度の構造関数

$$S_p(r) = \langle \{(\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})) \cdot \hat{\mathbf{r}}\}^p \rangle, \quad \left(\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \right)$$

に関しては、次元解析から

$$S_p = C_p \epsilon^{p/3} r^{p/3} \text{ for } \epsilon^{-1/4} \nu^{3/4} < r < L$$

となる。ここで $p = 2$ の場合は、フーリエ・エネルギースペクトルの $5/3$ 乗側

$$E(k) = C \epsilon^{2/3} k^{-5/3}$$

と同じことである。

また $p = 3$ のみは厳密で $C_3 = -4/5$ となる：

$$S_3(r) = \langle (\delta u_{||}(r))^3 \rangle = -\frac{4}{5}\epsilon r$$

この式の詳しい意味は

$$\underbrace{\lim_{r \rightarrow 0}}_{\text{小スケール}} \underbrace{\lim_{R \rightarrow \infty}}_{\text{高 } R} \underbrace{\lim_{t \rightarrow \infty}}_{\text{準定常}} \frac{S_3(r)}{r} = -\frac{4}{5}\epsilon \quad (4)$$

である。ここで極限操作の順序に注意が必要である。上で述べた順番では Euler 方程式の解が爆発しても、しなくてもこの表式は有効である。しかし、もし Euler が爆発しない場合、任意に固定した t について $\epsilon \rightarrow 0$ ($R \rightarrow \infty$) である。よって

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{R \rightarrow \infty} \epsilon = 0$$

となり、極限操作の順番をむやみに入れ替えると trivial な結果となってしまう。

もし (3) を満たす $T_c(R)$ があって R について一様に有界となるなら、つまり R によらない定数 M があって

$$T_c(R) < M$$

となるならば、Navier-Stokes 方程式の形式的な非粘性極限である、Euler 方程式は特異点を形成を避けることはできない。この仮説と大きく矛盾するような数値実験の報告を知られていないが、上の臨界時刻のレイノルズ数依存性は微妙すぎるため、決定することが不可能に近い。一方、

$$T_c(R) \rightarrow \infty (R \rightarrow \infty)$$

となる場合、Euler 方程式の爆発は起きない。たとえば $T_c(R) \propto \log(R)$, $\log \log(R)$, ... などの場合がこれにあたる。最初の依存性は、2次元のエンストロフィー散逸開始時刻に類似している。

1.2 Onsager 予想

実は、Kolmogorov(1941) の乱流理論 $k^{-5/3}$ は、同時期に3人の研究者によって導かれていた。残る2人は [Weisacker1948] および [Onsager1945] である。3人目は、統計力学の大家で、2次元渦糸系の統計力学 [Onsager1949] を創始したことで知られている。その、論文の末尾あたりに3次元乱流のエネルギー散逸に関する興味深い記述が見られる。[Eyink1994] にも引用された最後の一節は以下のものである。

It is of some interest to note that in principle, turbulent dissipation as described could take place just as readily without the final assistance by viscosity. In the absence of viscosity, the standard proof of the conservation of energy does not apply, because the velocity

field does not remain differentiable ! In fact it is possible to show that the velocity field in such “ideal” turbulence cannot obey any LIPSCHITZ condition of the form

$$(26) \quad |v(r' + r) - v(r')| < (\text{const.})r^n,$$

for any order n greater than $1/3$; otherwise the energy is conserved. Of course, under the circumstances, the ordinary formulation of the laws of motion in terms of differential equations becomes inadequate and must be replaced by a more general description; for example, the formulation (15) in terms of Fourier series will do. The detailed conservation of energy (17) does not imply conservation of the total energy if the number of steps in the cascade is infinite, as expected, and the double sum of $Q(k, k')$ converges only conditionally.

Onsager が乱流の統計理論（Kolomogorov 理論の等価版）を考えた時

$$\langle |u(x+r) - u(x)|^2 \rangle \sim r^{2/3}$$

から、乱流中の速度場は、およそ $1/3$ 階だけ微分できるような特異なものであると解釈した。これが上の指数 $n = 1/3$ の予想の動機である。

彼は、このように Euler 方程式のエネルギー保存則に言及して、Fourier 級数の収束性が劣化すると、その証明は無効になることを指摘し（このこと自体は驚くべきことではない）完全流体でも、特異点が発生した場合、エネルギーは減衰し、そのような解で Reynolds 数乱流を表す可能性を示唆した。物理空間での完全流体の方程式（Euler 方程式）からエネルギー保存則を導く際、速度場などの変数は十分滑らかであることを仮定して、部分積分を用いる。（速度場に対して微分可能性を要求しない、一般化された解の存在を認めた上で、）この仮定をどれほどまで弱めることができるかが問題である。

[Eyink1994] は、Onsager の助言に従い、Fourier 級数を用いて Euler 方程式のエネルギー保存則が満足される十分条件を、2 種類導いた。

1. Hölder, C^α , $\alpha > 1/2$

2. *-Hölder, $\|u\|_{C_*^\alpha} = \sum_k |k|^\alpha |u(k)|$ $\alpha > 1/3$

ふつうの Hölder ノルムでは、エネルギー保存則を示すには $\alpha > 1/3$ では不十分で $\alpha > 1/2$ が必要であった。2 のような、より強いノルムを用いると、 $\alpha > 1/3$ で証明することが出来た。この解析は [SF1975] の延長線上にある。そこでは、 $E(k) \propto k^{-n}$, $n > 8/3$ であるならば、エネルギーフラックスは $k \rightarrow \infty$ において $\Pi(k) \rightarrow 0$ となることが示されている。

Eyink の結果は Onsager の予想した巾より少し大きかった（普通の Hölder の場合）。これは Fourier 空間での解析では位相情報の処理が困難なためと考えられる²。予想され

²すべてのフーリエ係数がわかって、位相情報が与える影響が微妙すぎるため L_p -ノルム ($p \neq 2$) の評価には実用上不十分なためである。この困難をある程度回避する、Dyadic 分解が Eyink によって使われたが、それでもシャープな評価は難しかった。

る臨界の巾指数 $1/3$ を自然なノルムで導くには、物理空間での解析を行なう方が便利である。この線に沿った研究が [CET1994] によって行われた。それによれば $\alpha > 1/3$ に対して

$$\langle |u(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - u(\mathbf{x})|^3 \rangle^{1/3} \leq Cr^\alpha \quad (5)$$

となれば、エネルギーは保存される ($\langle \rangle$ は空間平均を表す)。この論文で用いられた Besov 空間 (の特別な場合) は、Kolmogorov が乱流の統計性質を論じた時に用いた、速度構造関数と良く似ている。 $\alpha = 3$ であれば、エネルギーは減衰する可能性がある。これは乱流の統計理論における Kolmogorov 4/5 則

$$\langle (u_{\parallel}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - u_{\parallel}(\mathbf{x}))^3 \rangle = -\frac{4}{5}\epsilon r, \quad (6)$$

を想起させる。ここで $\langle \rangle$ はアンサンブル平均を表す。つまり、[CET1994] の結果は Kolmogorov 4/5 則の deterministic version とみなすことができる。より詳しくは、[DR2000, Eyink2003] を参照。

2 渦力学の基礎

非粘性の保存量に注目することは渦運動力学を考える際、重要なことであろう。2 次の保存量にはエネルギーの他に、ヘリシティ [Moffatt1969] が知られている。後者はより一般的な、速度循環の保存則の 1 つの表れである。またこれは、非粘性流体では渦線が凍結していることと同値である。

この保存則を、より簡明に表現するために以下のインパルスによる定式化を述べる。これがなぜ重要かという、保存法則に幾何学的な見方を与えるからである。つまり、渦度は微小な線要素とみなせるのに対して、インパルスは微小な面要素とみなせる。内積は微小な体積要素を表すので非圧縮流で保存されるが、これがヘリシティ保存である。幾何学的に考えると一方だけを重視し、他方を顧みないのは不自然である。また、インパルス定式化は Lagrange 表示において正準ハミルトン系をなすという特徴がある。

この定式化を用いると、各流体要素の持つヘリシティの変化を簡明に評価できるという特徴がある。それと渦構造との関係も興味深い研究対象の 1 つである。[Ohkitani2004a]

2.1 インパルスによる定式化

非圧縮 Navier-Stokes 方程式で記述される粘性流体の運動を考える。渦度 ω を用いると、運動方程式は

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega = \omega \cdot \nabla \mathbf{u} + \nu \Delta \omega. \quad (7)$$

と書ける。

非粘性の場合には、渦度は流体中の微小な線要素の方程式と同じ式に従って発展する。Lagrange 表示を用いて渦度方程式を時間について積分することにより Cauchy の第 1 積分

$$\omega_i = \omega_j(0) \frac{\partial x_i}{\partial a_j}, \quad (8)$$

が得られる。また、Euler 方程式を時間について積分することにより、速度に対して Weber 変換

$$u_j(\mathbf{a}, t) \frac{\partial x_j}{\partial a_i} - u_i(\mathbf{a}, 0) = -\frac{\partial \psi}{\partial a_i} \quad (9)$$

が得られる。

普通の helicity 密度の時間発展は

$$\frac{D}{Dt} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} - p \right) + \nu (\boldsymbol{\omega} \cdot \Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \Delta \boldsymbol{\omega}) \quad (10)$$

となる。非粘性流体については、この空間平均は保存されるが、局所 helicity は時間空間的に揺らぐ。上式の右辺に現れる、スカラー量 $|\mathbf{u}|^2/2 - p$ は以下でたびたび現れる。 $\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla$ は Lagrange 表示において t に依らないので上式から helicity の有限時間における Lagrange 的变化は次のように書くことができる。

$$\Delta(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}) \equiv \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} - \mathbf{u}(0) \cdot \boldsymbol{\omega}(0) = -\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \psi, \quad (11)$$

ここで ψ は

$$\psi(\mathbf{a}, t) \equiv \int_0^t \left(p(\mathbf{a}, t') - \frac{|\mathbf{u}(\mathbf{a}, t')|^2}{2} \right) dt' \quad (12)$$

で定義され、Weber ポテンシャルと呼ぶことにする。

上で見たように、適当な境界条件の下で、全ヘリシティは保存されるが、その局所的な密度は保存されない。

$$\frac{D}{Dt} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} = -(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \left(p - \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) \quad (13)$$

この式を基にして、局所的に保存する 'ヘリシティ' を考えることにより (幾何ゲージによる) インパルスの定義が導ける。完全流体では、 $[\frac{D}{Dt}, \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla] = 0$, であることに注意すれば、上の式は

$$\frac{D}{Dt} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} = -\frac{D}{Dt} (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \int_0^t \left(p - \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) dt', \quad (14)$$

と書ける。そこで ψ を用いると

$$\frac{D}{Dt} (\mathbf{u} + \nabla \psi) \cdot \boldsymbol{\omega} = 0,$$

となる。これは $\boldsymbol{\gamma} \equiv \mathbf{u} + \nabla \psi$ に対するヘリシティが保存することを示している。

$$\frac{D}{Dt} (\boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla \times \boldsymbol{\gamma}) = 0.$$

この $\boldsymbol{\gamma}$ が、幾何ゲージによるインパルス変数である。以下では、もう少し一般的にこの変数について考察する。

2.2 Kuz'min-Oseledets 変数

一般に圧縮性をもつベクトル γ を考え、その Helmholtz 分解における solenoidal 成分を \mathbf{u} になるようにとる

$$\gamma = \mathbf{u} + \nabla\phi. \quad (15)$$

この定義は、前述の Weber 変換の物理空間表示に他ならないことに注意（ヤコビ行列をかければよい）。ここで

$$\left[\frac{D}{Dt}, \nabla \right] = -(\nabla \mathbf{u})^T \cdot \nabla$$

に注意すれば Navier-Stokes 方程式から

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \gamma = -(\nabla \mathbf{u})^T \gamma + \nabla \lambda + \nu \Delta \gamma, \quad (16)$$

$$\frac{D\phi}{Dt} = p - \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \lambda + \nu \Delta \phi \quad (17)$$

を導くことができる。圧力が陽に現れないように条件 $\lambda = 0$ を課すと、 γ の時間発展は

$$\frac{D\gamma_i}{Dt} = -\gamma_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \nu \Delta \gamma_i, \quad (18)$$

となる。一方、 ϕ の方程式は

$$\frac{D\phi}{Dt} = p - \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \nu \Delta \phi. \quad (19)$$

となる。これが Kuz'min and Oseledets による定式化である（後述の、インパルス形式の歴史を参照）。図 3 に、非圧縮流の表現の相互関係をまとめてある。インパルス表示は、非粘性流体、粘性流体ともに一般的にカバーしている。

γ の発展に影響するという意味で ϕ は、パッシブスカラーではないことを注意しておく。インパルスは、流体中の微小な面要素の方程式と同じ式に従って発展する。Lagrange 変数を用いて時間積分すると

$$\gamma_i = \gamma_j(0) \frac{\partial a_j}{\partial x_i}. \quad (20)$$

が成立する。前者の Cauchy の公式に対して後者を Cauchy 公式 II と呼ぶことにする。

この定式化では、 $\nu = 0$ のとき γ に付随する 'helicity' は局所的に保存される

$$\frac{D}{Dt} \gamma \cdot \omega = 0. \quad (21)$$

図 2 に、保存法則の関係を図式的にまとめてある。

また $\nabla \times \gamma = \nabla \times \mathbf{u} = \omega$ に注意する。

γ の空間平均は

$$\langle |\gamma|^2 \rangle = \langle |\mathbf{u}|^2 \rangle + \langle |\nabla \phi|^2 \rangle, \quad (22)$$

となる、ここで $\langle \rangle$ 空間平均を表す。

Lagrange 表示をとると、この定式化は \mathbf{x} および γ を正準変数とする 正準 Hamiltonian 系をなす。

$$\frac{Dx_i(\mathbf{a})}{Dt} = \frac{\delta H}{\delta \gamma_i(\mathbf{a})}, \quad (23)$$

$$\frac{D\gamma_i(\mathbf{a})}{Dt} = -\frac{\delta H}{\delta x_i(\mathbf{a})}, \quad (24)$$

ここでハミトニアン H は全運動エネルギーである

$$H = \frac{1}{2} \int |\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \int \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\gamma} d\mathbf{x}.$$

(23) は自明だが、(24) を確かめるには被積分関数の具体的な表現（ダイポールポテンシャル）を用いる。

上で用いたゲージを含む、より一般的なゲージの選択がある。対応する、一般化された Weber 変換を書くと

$$\phi(\mathbf{a}, t) = \int_0^t \left(p(\mathbf{a}, t') + \lambda(\mathbf{a}, t') - \frac{|\mathbf{u}(\mathbf{a}, t')|^2}{2} \right) dt' = \int_0^t \lambda(\mathbf{a}, t') dt' + \psi, \quad (25)$$

$$\gamma_j(\mathbf{a}, t) \frac{\partial x_j}{\partial a_i} - \gamma_i(\mathbf{a}, 0) = -\frac{\partial \Phi}{\partial a_i}, \quad (26)$$

$$\Phi(\mathbf{a}, t) \equiv \psi - \phi = -\int_0^t \lambda dt' \quad (27)$$

となる。

上のゲージの選択では $\phi = \psi$ である。

特に、 $\phi = \psi$ ($\Phi = \lambda = 0$) の場合、 γ は 通常の impulse（幾何学ゲージ）となる。また、もし $\phi = 0$ ($\Phi = \psi$) なら γ は普通速度 \mathbf{u} になる。

速度が complex lamellar であるとき、つまり

$$\mathbf{u} = f \nabla g - \nabla \phi \quad (28)$$

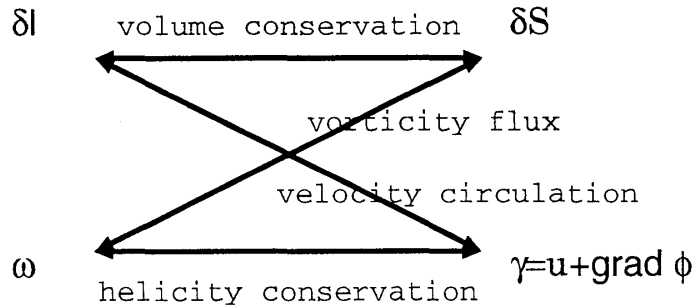


図 2: 保存則の相互関係

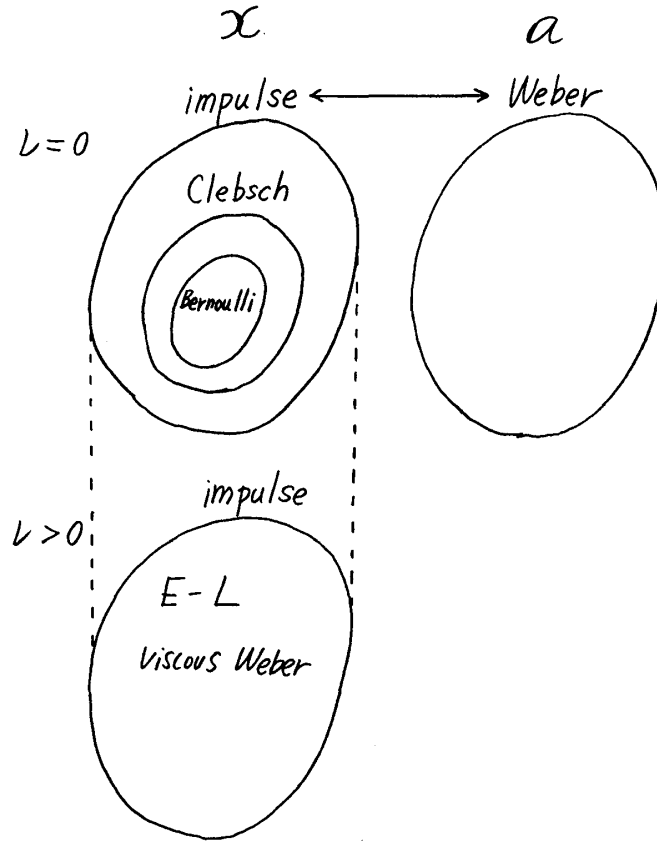


図 3: 非圧縮流の表現

とかけるとき、速度場は Clebsch 表示を持つと言う。これら f, g の満たす方程式

$$p + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} - \frac{\partial \phi}{\partial t} + f \frac{\partial g}{\partial t} = 0 \quad (29)$$

は Clebsch 変換 と呼ばれる。これは インパルス定式化から以下のようにして導くことができる。

Clebsch ポテンシャルで表現可能な場合、

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{Dg}{Dt} = 0, \quad (30)$$

および

$$\frac{D\phi}{Dt} = p - \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \quad (31)$$

が成り立つ。(28) と $\mathbf{u} \cdot$ との内積をとると

$$|\mathbf{u}|^2 = f \mathbf{u} \cdot \nabla g - \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = -f \frac{\partial g}{\partial t} - \mathbf{u} \cdot \nabla \phi. \quad (32)$$

となる。(31) から $\mathbf{u} \cdot \nabla \phi$ を消去すると Clebsch 変換を得る。

大域的な complex lamellar 表示が可能となる必要十分条件 (Frobenius) は $\gamma \cdot \omega \equiv 0$ である。helicity の保存から、この条件は、初期に満足されれば Euler 方程式の時間発展の下でずっと成立する。

なお、

$$\mathbf{u} = -\nabla\phi$$

のとき (つまり $f = 0$ または $g = \text{const}$ のとき)、Weber 変換がポテンシャル流に対する Bernoulli 定理に帰着する。

2.3 インパルス形式の歴史

インパルス形式の実用例は、最近になって表れてきたが、この定式化そのものの歴史は長い。いくつかの文献をピックアップする。

- Lord Kelvin

'On vortex motion', Trans. Roy. Soc. Edinburgh, **25**(1867), pp.217-260.

循環の保存、インパルスの定義

- J.J. Thomson

'A Treatise on the Motion of Vortex rings', MacMillan, 1883, London.

渦輪の運動

- P.H. Roberts

'A Hamiltonian theory for weakly interacting vortices', Mathematika, **19**(1972), pp.169-179.

渦輪の運動における Hamilton 系の認識

- S.G. Chefranov

'Dynamics of point vortex dipoles and spontaneous singularities in three-dimensional turbulent flows', Sov. Phys. JETP, **66**(1987), pp.85-89.

離散化 Hamilton 系

- G.A. Kuz'min 'Ideal incompressible hydrodynamics of the vortex momentum density', Phys. Lett., **96A**(1983), pp.88-90.

V.I. Oseledets 'On a new way of writing the Navier-Stokes equation. The Hamiltonian formalism', Russ. Math. Surveys, **44**(1989), pp.210-211.

一般の非圧縮流における Hamilton 系の認識

- A.J. Chorin 'Vortex phase transitions in $2\frac{1}{2}$ dimensions', J. Stat. Phys., **76**(1994), pp.835-856.

T.F. Buttke 'Velocity methods: Lagrangian numerical methods which preserve the Hamiltonian structure of incompressible flow', in *Vortex flows and related numerical methods*, e.d. J.T. Beale *et al.*, Kulwer, Dordrecht, Boston, London, 1993, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., pp.39-57.

数値計算

- G.Russo - P. Smereka, 'Impulse formulation of the Euler equations: general properties and numerical methods', J. Fluid Mech., **391**(1999), pp.189-209.

いろいろなゲージの整理

- T.B. Benjamin 'Impulse, flow force and variational principles', IMA J. Appl. Math., 1984, **32**, 3-68.
- 橋本 英典、'渦運動の力学'、'乱流現象の科学 その解明と制御' 巽 友正 編 の第7章、東大出版会、1986年。

インパルスに関するレビュー

また、関連の深い Euler-Poincaré 形式については、福本康秀 'Euler-Poincaré 形式による渦のトポロジーと力学', 物性研究 81-3(2003)414, を参照。

3 Cauchy-Weber 公式の粘性流体への拡張

3.1 加法的な拡張

Cauchy 公式の粘性流体への一般化の 1 つは、[Carstoiu1946] によってなされた。これは、以下に見るように加法的な拡張である。この様な拡張によって、乱流中の渦構造の形成に関して、渦伸長項と粘性拡散項の拮抗の様子を定量的に評価することが出来る。[Ohkitani2004b]

$$\omega_i(\mathbf{a}, t) = \left(\omega_j(\mathbf{a}, 0) + \int_0^t \frac{\partial a_j}{\partial x_k} \nu \Delta \omega_k dt' \right) \frac{\partial x_i(\mathbf{a}, t)}{\partial a_j}. \quad (33)$$

この straightforward な拡張は以下の様に導出できる。最初に、非粘性流についての通常の Cauchy 則を証明する 1 つの方法は

$$\frac{D}{Dt} \left(\omega_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) = 0$$

を確かめることである。(右辺は $\frac{D}{Dt}\omega_j(0)$ に等しいはずなのでこれを考える。)

次に外力項 \mathbf{F} を持つ渦度方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{F}$$

を考える。この場合には、以下を計算するとよい。

$$\frac{D}{Dt} \left(\omega_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) = F_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i}.$$

こうして得られたゼロでは無い量を時間について積分すればよい。粘性流体の場合は $\mathbf{F} = \nu \Delta \boldsymbol{\omega}$ とおけば上に述べた Cârstoiu の拡張が得られる。

Weber 変換の、粘性流体に対する一般化も同様にして行うことができる。結果は

$$u_j \frac{\partial x_j}{\partial a_i} - u_i(0) = -\frac{\partial \psi}{\partial a_i} + \nu \int_0^t (\Delta u_j) \frac{\partial x_j}{\partial a_i} dt' \quad (34)$$

または、

$$= -\frac{\partial \phi}{\partial a_i} + \nu \int_0^t (\Delta \gamma_j) \frac{\partial x_j}{\partial a_i} dt'.$$

γ を用いれば

$$\gamma_j \frac{\partial x_j}{\partial a_i} - \gamma_i(0) = \nu \int_0^t (\Delta \gamma_j) \frac{\partial x_j}{\partial a_i} dt \quad (35)$$

となる。なお、

$$\omega_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \omega_j(0) \frac{\partial}{\partial a_j} + \nu \int_0^t (\Delta \omega_k) \frac{\partial a_j}{\partial x_k} dt' \frac{\partial}{\partial a_j} \quad (36)$$

にも注意。

3.2 乗法的な拡張：Euler-Lagrange 定式化

これは Weber 変換を乗法的に拡張する点に特徴がある。最近発見されたこの定式化 [Constantin2001, Constantin2003] について、簡単にその導出を述べる。

次の方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\gamma} = -(\nabla \mathbf{u})^T \boldsymbol{\gamma} + \nu \Delta \boldsymbol{\gamma}, \quad (37)$$

(ここで T は転置行列を表す) を満たすインパルス $\boldsymbol{\gamma}$ を考える。

Weber 変換を念頭において、

$$\boldsymbol{\gamma} = (\nabla \mathbf{A})^T \mathbf{v}, \quad (38)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{P}(\boldsymbol{\gamma}), \quad (39)$$

つまり

$$u_i = \frac{\partial A_j}{\partial x_i} v_j - \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad (40)$$

と書く。ここで、粘性散逸を伴った粒子ラベル \mathbf{A} を、次の定義によって導入する

$$D_t A_i = \nu \Delta A_i \quad (41)$$

そして \mathbf{v} の時間発展を Weber 公式で与えられる \mathbf{u} が Navier-Stokes 方程式を満たすように決定しよう。再び

$$[D_t, \partial_i] = -(\partial_i u_j) \partial_j$$

に注意すれば、一般に

$$D_t u_i = (\partial_i D_t A_j) v_j + (\partial_i A_j) D_t v_j - \partial_i \left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + D_t \phi \right). \quad (42)$$

となる。 \mathbf{v} の方程式を求めるため剰余項を \mathbf{R} とおいて

$$D_t v_i = \nu (\Delta v_i + R_i) \quad (43)$$

と書くと、これは

$$= \nu ((\Delta \partial_i A_j) v_j + (\partial_i A_j) \Delta v_j + (\partial_i A_j) R_j) - \partial_i \left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + D_t \phi \right). \quad (44)$$

さて、右辺第1項が $\nu \Delta (\partial_i A_j) v_j$ の形にまとまる様に \mathbf{R} を決めたい。それには、この項が

$$(\partial_i A_j) R_j = 2(\partial_k (\partial_i A_j)) (\partial_k v_j)$$

となればよいが、これには

$$R_j = 2C_{lkj} \partial_k v_l,$$

$$C_{lkj} = Q_{jlm} \partial_k (\partial_m A_l)$$

と取ればよいことが分かる。

以上をまとめると、 \mathbf{A} は拡散を伴う、粒子のラベル変数、 \mathbf{v} は擬速度（非粘性の場合、定数の初期速度に帰着）を表し、各々[Constantin2001]

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{A} = \nu \Delta \mathbf{A}, \quad (45)$$

および

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} = 2\nu \mathbf{C} : \nabla \mathbf{v} + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad (46)$$

満足する。ここで $\mathbf{C} : \nabla \mathbf{v}$ の第 i 成分は $C_{m,k;i} \frac{\partial v_m}{\partial x_k}$ で、そして

$$C_{m,k;i} = \frac{\partial x_j}{\partial A_i} \frac{\partial^2 A_m}{\partial x_j \partial x_k}$$

である。 C はEuler的な微分とEuler-Lagrange的な微分の非可換性を表す:

$$[\nabla_A^i, \nabla_E^k] = C_{m,k;i} \nabla_A^m$$

方程式系 (38,39,45,46) は Navier-Stokes 方程式と同値である。(従属変数である) A の勾配は $(\nabla A)^{-1}$ を通じて定義される。詳しくは [Constantin2001, Constantin2003] を参照のこと。

さて渦度の定義

$$\omega(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$$

にならって、擬渦度を

$$\zeta(\mathbf{x}, t) = \nabla_A \times \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$$

を定義すると、拡張された Cauchy 公式

$$\omega = \text{Det}(\nabla A)(\nabla A)^{-1}\zeta \quad (47)$$

が成り立つことが示せる。ラベル変数のヤコビ行列式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \text{Det}(\nabla A) = \nu \text{Det}(\nabla A) (C_{i,k;j} C_{j,k;i} + \partial_i C_{j,i;j}) \quad (48)$$

あるいは

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla - \nu \Delta \right) \log(\text{Det}(\nabla A)) = \nu C_{i,k;j} C_{j,k;i} \quad (49)$$

にしたがって時間発展する。また

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \text{Det}(\nabla A) = C_{j,i;j} \quad (50)$$

にも注意。

数値計算を行う場合は、(フーリエ変換などを用いるので) 基礎方程式を

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = -\nabla(\gamma \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{u} \times \omega + \nu \Delta \gamma, \quad (51)$$

と書き換えた方が都合が良い。また、 C が A の3次の量であるので、アライアス誤差の問題があるため、 v の発展を追うことは得策ではない。変位ベクトル

$$\ell = A - x$$

を考えると、これは以下のパッシブな方程式

$$\frac{\partial \ell}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \ell = -\mathbf{u} + \nu \Delta \ell \quad (52)$$

に従う。ひとたび ℓ が得られると、接続テンソル C などは逆行列演算などで評価することができる。

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_j} = \frac{\partial l_i}{\partial x_j} + \delta_{ij}$$

非粘性の場合は $\det(\nabla \mathbf{A})$ は定数であり、行列の可逆性は滑らかな時間発展の下で保たれる。粘性がある場合、一般に、この行列式は保存されない。[Constantin2001] したがって、有限時間の後に、これが 0 となり、粒子のラベル変数と空間座標との 1 : 1 の対応が無くなり、 $\nabla \mathbf{A}$ は行列として特異になる可能性がある。

数値実験によれば、これが実際に起きることが示された。可逆性を保持するには、空間のどこかで行列式の値が極端に小さくなった場合

$$\ell = 0$$

と粒子ラベル変数をリセットを行う必要がある。実際には

$$\ell = 0 \text{ if } \min(\det(\nabla \mathbf{A})) \leq \epsilon,$$

なった場合にリセットを行う、ここで ϵ は小さい正数である。 ϵ の値を変化させても、 ℓ の振る舞いは定性的には同じであることが数値実験で確かめられている。[OC2003] では、渦のつなぎかえの現象が上のリセット現象によってとらえられることが示されている。

この定式化では、 ℓ のリセットを行いながら、near-identity 変換によって Navier-Stokes 流の発展を記述することになる。そのリセット間隔から流れの小スケールについての時間スケールを抽出することができる。この解析方法は、乱流に関して応用することができる。

4 流体方程式の爆発の問題（3次元）

4.1 Beale-Kato-Majda 基準

Euler 方程式の特異点発生を問題にするような大規模な直接数値計算においては精度保証された計算法を利用する事は事実上不可能である。しかし、数学解析から導かれた、いくつかの判定基準が知られている。数値実験結果を有限時間の発散を示唆していると解釈するためには、これらの判定基準に合格することが必要になる。そのうち、もっとも有名な基準は次の Beale-加藤-Majda 基準であろう。[BKM1984]

Euler 方程式の滑らかな解の存在は渦度の最大値によってコントロールされる。

キーとなる不等式は $s \geq 3$ に対して

$$|\mathbf{u}|_{H^s}(t) \leq |\mathbf{u}|_{H^s}(0) \exp \left(C \exp \left(C \int_0^t |\boldsymbol{\omega}|_{\infty}(t') dt' \right) \right)$$

この定理は、もし特異点があれば、渦度の高階微分に隠れることはできないことを意味する。そして、特異点が発生する場合、渦度の増加する速さについて制限を与える：

すなわち、 $\omega(t) = O\left(\frac{1}{(t_* - t)^\beta}\right)$ なら $\beta \geq 1$ である。また、ソボレフの補題

$$\sup |\omega(\mathbf{x})| \leq c|\mathbf{u}|_{H^s}$$

より、もし爆発があるなら、 H^3 ノルムが無限大になる。エンストロフィーは爆発が起きても、(その時点では) 有限にとどまるかも知れない。

この定理の証明を理解するのに必要な予備知識を列挙しておく。

- ソボレフの埋蔵定理

$\mathbf{u} \in H^s$ ($s > 5/2$) なら $\mathbf{u} \in C^1$ ここで

$$|\mathbf{u}|_{H^s} \equiv \left(\sum_{\mathbf{k}} (1 + |\mathbf{k}|^{2s}) |\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k})|^2 \right)^{1/2}.$$

- Gagliardo-Nirenberg の不等式 (たとえば [DG1995] の付録参照)。

- Gronwall のレンマ

f, ϕ が連続、 ϕ が単調増加のとき

$$f(t) \leq f(0) + \int_0^t \phi(f(s)) ds \text{ for } t \leq T$$

とする。 $g(t)$ を

$$\frac{dg}{dt} = \phi(g), \quad g(0) = f(0)$$

の解とすると

$$f(t) \leq g(t), \quad t \in [0, T].$$

4.2 渦度ベクトルの向き

非線型性の通減が起きると、Euler 方程式の場合には渦度の伸長に制限が加わる。大雑把に言うと、「特異点近傍で特異点が発生する時間まで渦度の向きが滑らかに留まると仮定すると、特異点は発生はしそうもない」ことが知られている。より正確には、以下の定理がある。

Theorem 4.1. Euler 方程式の解の速度が $t = T$ まで有界で、かつ渦度の L^1_{loc} ノルムが有界、つまり

$$L^{-3} \sup_{\mathbf{x}} \int_{|\mathbf{y}| \leq L} |\omega(\mathbf{x} + \mathbf{y})| d\mathbf{y} < \infty$$

であるならば、渦度の向き ξ は $t = T$ まで一様 Lipschitz 連続となることはあり得ない。

Proof. [Constantin1994, CFM1996] を参照。 □

これを念頭におけば、もし渦度の特異点が発生するとすれば、その向き、すなわち渦線は局所的に複雑な幾何学的構造を持ちそうである。つまり、渦線の引き延ばしや、折り畳みを繰り返した（大きなスケールから見れば）ギザギザした構造などが1つの候補となる。一方で数値計算において、時間発展の結果、精度が不足してしてくると場の構造がギザギザしてくることはよく知られている。問題は数値実験だけから、こうして現れてくる構造が、偏微分方程式の解の真の性質なのか、あるいは、数値計算上の単なる幻影 (artifact) なのか判断することが困難なことである。

Beale-加藤-Majda 基準では、渦度ベクトルの大きさのみを問題にし、向きを不問に付したため L_∞ ノルムが必要であった。上の定理は、向きを考慮することで、より弱いノルムに関する条件に置き換えていることに特徴がある。

局所的な相似解があったとすると、その特異点の強さは次のように制限される。これは、エネルギーの保存量を用いて、長さと時間の次元を読み変えることによって得られる。

このことを示すためには 恒等式

$$\omega = P(\omega)$$

(P はソレノイダル射影) から導くことができる不等式

$$\sup_x |\omega| \leq \left(\int |\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} (l_\mu(t))^{-5/2}, \quad (53)$$

ここで

$$l_\mu(t) = \left(\frac{|\omega|_\mu}{|\mathbf{u}|_{L^2}} \right)^{\frac{-2}{2\mu+5}}, \quad |\omega|_\mu \equiv \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{y}} \frac{|\omega(\mathbf{x}) - \omega(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\mu} \quad (0 < \mu \leq 1)$$

である。これより、渦度が

$$\omega \sim \frac{1}{t_* - t} \Omega \left(\frac{\mathbf{x}}{l(t)} \right)$$

の様に爆発するなら

$$\int_0^{t_*} (l(t))^{-5/2} dt = \infty.$$

つまり $l(t)$ は $l(t) \propto (t_* - t)^{2/5}$ ないし、それより速く0にならなければいけない。この結果は、全エネルギーをパラメーターとした次元解析による結果と一致する。

4.3 計算例

渦対を1個、2個、ないし6個用いることで、流体方程式の爆発解のモデルを作ることが試みられている。図4はこれらのモデルの概念図である。

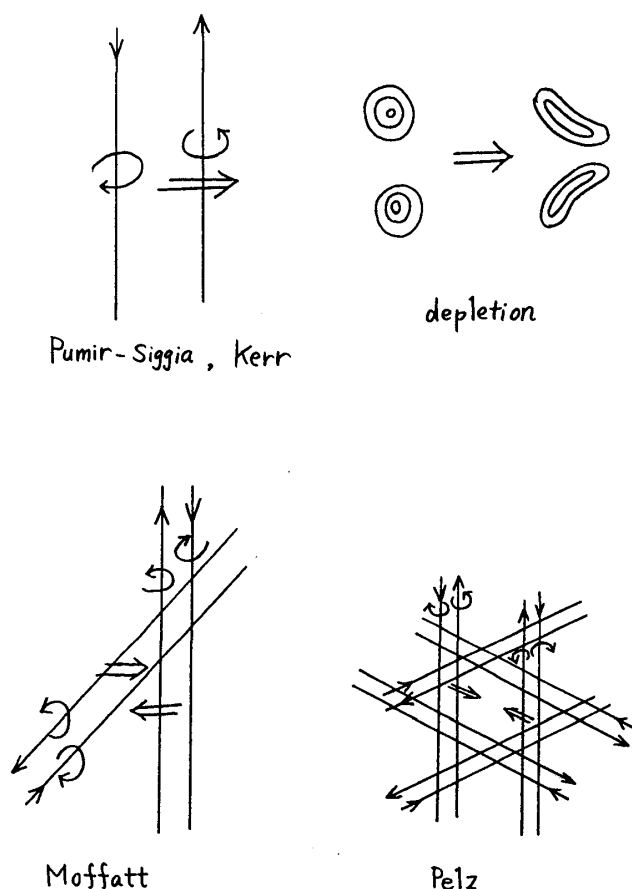


図 4: 渦対によるいくつかの爆発モデル

渦対モデル

反平行な2本の渦管の対は一般的な乱れた流れの中から自然に発生する傾向がある。この対の発生は自己誘導速度を考慮すれば理解することができる。このような対は、特異点形成の1つの可能性として研究されてきた。この場合非線型性の増強が起きてしまう。[PS1985, PS1987]において、Biot-Savart モデルを用いた渦管を基本とする Euler 方程式の数値計算が報告されている。このモデルは有限時間で爆発することが数値計算で示されている。

詳しくいうと、局所的な渦度が有限時間に無限に大きくなり、渦糸の長さも無限大に引き伸ばされる。エンストロフィーは有限のままである。

このモデルが Euler 方程式のよい近似解を与えるのはある時間帯までしか確かめられていないため、この結果をそのまま Euler 方程式の解の爆発と解釈することはできない。しかし、一般の流れにおいて反平行な渦度を持つ 2 本の渦管は自然に出現する傾向があるため、少なくとも前駆的な現象としては意味がある。また、その後の発展が、非線型性の増減現象によりおとなしいものに変化するか否かを比較するための対象となり得る。

渦糸法 (vortex filament method) という計算手法について基本的な考え方を説明する。
[CK2000]

渦度が与えられれば、速度はいわゆる Biot-Savart 則から

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{-1}{4\pi} \int_{\mathbf{R}^3} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} d\mathbf{y} \quad (54)$$

と決めることができる。渦糸法では、この渦度を渦管の分布で

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \Gamma \mathbf{e} ds$$

と置き換える。ここで s は渦管に沿った弧長で、 Γ は渦管の強さ（循環）である。また

$$\mathbf{e} \equiv \frac{d\mathbf{y}}{ds}$$

すると Biot-Savart 則は

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{-\Gamma}{4\pi} \int \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y}(s)) \times \mathbf{e}(s)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}(s)|^3} ds$$

となる。上の Biot-Savart 積分を数値的に評価する 1 つの方法はカットオフを挿入することである

$$\mathbf{u}(s) = \frac{-\Gamma}{4\pi} \int \frac{(\mathbf{x}(s) - \mathbf{y}(s')) \times \mathbf{e}(s)}{|\mathbf{x}(s) - \mathbf{y}(s') + \sigma(s)^2 + \sigma(s')^2|^3} ds'.$$

局所的な渦管の体積が保存されるように

$$\sigma(s) \left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right| = \text{const.}$$

とおくと 1 つのモデル (以下、Pumir-Siggia モデルと呼ぶ) が得られる。

渦糸法が流れを正確に表現するためには、コアの変形が小さいこと、および、コア半径 σ に比べて渦管の曲率半径 r_c 、渦管間の距離 ρ が大きいこと（グニャグニャしない条件）が必要である。

このモデルにおける解の爆発とは、コア半径がゼロになることである。コアの時間発展は

$$\frac{d\sigma^2}{dt} = \nu - \sigma^2 \frac{d \log \left(\left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right| \right)}{dt}$$

となる。ここで

$$\frac{d \log \left(\left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right| \right)}{dt} \propto \frac{\Gamma}{\max(\rho, \sigma)} \frac{1}{\rho} \propto \frac{\Gamma}{\sigma^2}$$

と見積もれば

$$\frac{d\sigma^2}{dt} = \nu - c\Gamma$$

が得られる。この右辺の符号は負にとどまる可能性があるため、粘性がコア半径がゼロになることを防ぎ得るどうか明らかではない。また、粘性がこのモデルの特異点を消去し得る場合でも、その際のコア半径は

$$\sigma \propto \exp\left(-\text{const}\frac{\Gamma}{\nu}\right)$$

という著しく小さなものになってからであることが示されている。あるいは、速度でいうと

$$\max |\mathbf{u}| \propto \exp\left(\text{const}\frac{\Gamma}{\nu}\right)$$

という程度に大きくなって初めて粘性が効果することに対応する。これは速度の循環と動粘性率が同じ次元を持っていることに起源がある。

一方、拡張された粘性（超粘性）項 $-\nu'(-\Delta)^{1+\alpha}$ を考えると事情が全く異なる。このときは、コアの時間発展は

$$\frac{d\sigma^2}{dt} = \frac{\nu'}{\sigma^{2\alpha}} - c\Gamma$$

と見積もることができる。第1項は常に非常に大きいので、右辺は正となり、特異点は発生しないことが示唆される。

証明こそないが、Pumir-Siggia モデルが爆発することは、数値実験結果からほぼまちがいないであろう。しかし、実際の Euler 方程式の流れ場のシミュレーションによれば、コアの変形のため、非線型性の逓減が起きる。このため、このモデルの解の爆発は必ずしも流体方程式の解の爆発を意味しない。実際、Pumir-Siggia モデルでは

$$\frac{\rho^2}{2\sigma^2} \propto \frac{1}{\text{const} + \log(\sigma^{-1})}$$

となることが示されており、これは数値実験とも一致する。ゆっくりとではあるがこの比は減少し、最終的には0となる。コア半径に比べて渦管間距離が小さくなることは、渦糸法の破綻を意味する。

たとえば、[PS1990] は渦対の必要に応じてメッシュを細かく更新する数値スキームを用いて、(Biot-Savart モデルではなく) 流れ場としての数値実験を行った。そこでは渦度は最終的には時間の指数関数程度で増加することを報告している。つまり、これは爆発が起きないことを示唆している。一方、類似の計算を行った [Kerr1983] は有限時間での爆発を示唆する結果を報告している。そこでは初期値の作成時に適当なフィルターを適用することの重要性が指摘されている。

有限時間での爆発に導くような強い渦伸長が持続するか否かについての数値実験結果は議論があり、結論は未だ確定していないように見える。

Moffatt モデル

上で述べた、渦対の時間発展では一般にコアの変形が無視できない可能性があるため、長時間後のモデルが Euler 方程式のよい近似になるか否か不明である。そこで、コア変形が弱くなるような流れを、いくつかの渦対を並べて実現しようとする試みがある。

ここで取り上げるモデルは、90度ねじれた配置をもつ、2組の渦対の正面衝突現象である。読者は、各渦対が互いに他方の渦管を伸長する誘導速度を持っていることを確認されたい。

このモデルでは、コア半径と渦管間距離の比が定数であることが仮定されている

$$\frac{\rho}{\sigma} = \text{const.}$$

これは、Navier-Stokes 方程式の爆発解のモデルとして考案された。このモデルの基礎となっているのは、外力項として平均流を伴ういわゆる Burgers 渦の厳密解である。軸対称座標系 (r, ϕ, z) において

$$U = \left(-\frac{1}{2}\gamma(t)r, 0, \gamma(t)z \right)$$

という形を持つ平均流 $(\gamma(t) = c(t_* - t)^{-1}, c > 0)$ によって渦度

$$\omega = (0, 0, \omega(r, t))$$

が引き伸ばされるとき、その時間発展は方程式

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\gamma(t)}{2r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \omega) + \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) \quad (55)$$

によって支配される。簡単のため初期値

$$\omega(r, 0) = \omega_0 \exp(-r^2/\delta_0^2)$$

を考えると、その循環は $\Gamma \equiv \pi \omega_0 \delta_0^2$ である。解は

$$\omega(r, t) = \frac{(c-1)\Gamma}{4\pi\nu(t_*-t)} \exp\left(-\frac{(c-1)r^2}{4\nu(t_*-t)}\right) \quad (56)$$

となる。初期値の条件から

$$c = 1 + \frac{4\nu t_*}{\delta_0^2} > 1$$

となる。渦度が有限時間で爆発する理由は、外力項の爆発のためだが、逆に、外力項が爆発しても必ずしも渦度の爆発が伴うとは限らない。[Moffatt2000] では、この解を少しだけ非軸対称な場合に拡張した上で渦対の衝突の問題に応用している。

初期時刻 $t = 0$ に $x = -a$, $y = \pm b$ に循環 $\pm\Gamma$ を持つ渦対を、また $x = a$, $z = \pm b$ に循環 $\pm\Gamma$ を持つ渦対を置く。するとこれら2組の渦対は原点に向って並進を始める。[Moffatt2000] では相似性の仮定

$$\frac{b(t)}{a(t)} = s$$

の基に $0.92 < s < 1.15$ である場合、爆発が起きる可能性が指摘されている。

2組の渦対が緊密な相互作用をする微小領域では局所相似解が実現されると仮定（内部解）し、より広い領域で成り立つ正則な外部解と滑らかに接続できると考える。このような解を具体的に求めることは難しいが、内部解が満足すべき接続条件（必要条件）を考慮することはできる。

2組の渦対が、互いに近づき相互作用することを基に考えられたこのモデルにおいて、渦対には捻じれが生じるが、近接相互作用の結果解が自己相似的に振る舞うと仮定する。そうすると、速度は

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2a(t_* - t)}} U \left(\frac{x}{\sqrt{2a(t_* - t)}} \right), \quad (57)$$

ただし

$$a(X \cdot \nabla_X U + U) + U \cdot \nabla_X U = -\nabla_X P + \nu \Delta_X U \quad (58)$$

となる。また、渦度

$$\omega(x, t) = \frac{1}{t_* - t} \Omega(X) \quad (59)$$

の満たす方程式は

$$\nabla_X \times ((U + aX)) + \nu \Delta_X \Omega = 0 \quad (60)$$

となる。[Leray1934] この方程式を満たす外部解 $\Omega(X)$ を求めて接合漸近展開（matched asymptotic expansion）の手法で内部解 $\omega(x)$ と、整合性を保つように

$$\lim_{|X| \rightarrow \infty} \Omega(X) = \lim_{|x| \rightarrow 0} \omega(x, t)$$

と接続する。外部の境界条件として $\Omega(X) \propto |X|^{-n}$ ($|X| \rightarrow \infty$) を考えると、すべての x について

$$|\omega(x, t)| \propto \frac{1}{(2a(t_* - t))^{1-n/2}} \frac{1}{|x|^n}$$

となる。 $n < 2$ の場合、 $t \rightarrow t_*$ のとき、内部解が定義されているすべての点で渦度が有界ではなくなる。 $n > 2$ なら、 $t \rightarrow t_*$ のとき、内部解の定義されているすべての点で渦度が0に収束する。いずれの場合も不合理なので、興味があるのは $n = 2$ の場合のみである。この場合の速度場に対する境界条件は $\Omega(X) \propto |X|^{-2}$, $U(X) \propto |X|^{-1}$ となる。[NRS1996] によれば $U(X)$ が $L^3(R^3)$ に入っていれば $U \equiv 0$ となる。上の $n = 2$ の場合はこれにはギリギリのところで入っていなかった。しかし、後の [Tsai1998] によって $U(X)$ が $3 < q < \infty$ なる $L^q(R^3)$ に含まれる場合にも、 $U \equiv 0$ であることが示された。したがって $n = 2$ の場合に想定された上記のモデルはこのままでは通用しない。[Moffatt2001]

Pelz のモデル

上に述べた非線形性の通減効果により、一般の初期値から発展した Euler 方程式の解では、渦構造の出現により、渦度の伸長効果がある程度抑制されてしまう。そのため数値計

算の精度が保たれていると考える時間帯で、有限時間での爆発を明確に示唆する数値解を得る事が難しくなる。

Pelz のアイデアは、方程式の時間発展で保存するような空間的対称性をもつ流れをとりあげ、この拘束によって非線形性の逓減を阻止しようとするものである。もともと、Kida によって見出された周期境界条件下における高対称流に端を発する。Kida らは Navier-Stokes 方程式に従う乱流に興味を持っていた。Boratav らはこの流れの Euler 方程式の数値計算を実行すると、原点近傍に大きな渦度を持つ 6 組の渦対が近付いて来ることを見出した。[Pelz1997, Pelz2001a]、また [GP2000, Pelz2001b] も参照。

この挙動をつぶさに観察するため、彼は渦糸法 (vortex filament method) という計算手法を用いて数値実験を行った。Pelz は一般には曲った渦管を、区分的な円柱渦管で置き換え数値計算を行った。断面は楕円と仮定することで、コアの円形からのずれを考慮した。彼の計算では、渦管の曲率半径はコア半径より大きく保たれ、時間の最後まで渦度分布は円柱状に近いものになっている。このことから、上の近似が妥当なものであることが示唆されている。これは、上で述べた、コアの形が扁平になってしまい非線形性の逓減が起きている、渦対の計算例と大きく異なる点である。初期条件の選択に特徴がある。原点近傍で 6 対の渦管が対称的に配置され時間とともにこれらが原点にむかって進む。爆発解の特徴有限時間で、これら 6 対の渦は原点に収縮する。

その際、解の時間発展が自己相似性を持つことを発見した。その空間スケールは $(t_* - t)^{1/2}$ と求められた。この指数は Navier-Stokes 方程式の自己相似性を髣髴とさせるが、偶然の一致かもしれない。

このような対称的な渦の配置が実際に爆発することの証明はないし、この様な流れが一般の初期値から自然に形成されるとは考えられない。また、エンストロフィーの特異性はあまり強くはない乱流の発生、ないしその間欠的な構造とは関係が深いとは思えない。しかし、とにかく爆発する 1 つの候補が得られたことは注目に値する。

5 流体方程式の爆発の問題 (2 次元)

5.1 Euler 方程式

(x, y) 平面内の流れ $\mathbf{u} = (u_1(x, y), u_2(x, y), 0)$ を考えると、渦度は $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$ となりこの平面に垂直となる。このため 伸長項 = ゼロ、つまり $\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u} \equiv 0$ という著しい性質をもつ。

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = 0 \quad (61)$$

この渦度の保存から、滑らかな解がいつまでも存在することが証明できることが知られている。これは業界では周知の事実だが、自明なことではない。(詳しくは [RS1978] にある文献を参照のこと。あるいは、上で述べた BKM 判定規準を認めればただちに分る。)

2次元 Euler 方程式とは異なる、興味深い2次元流体力学の方程式も幾つか知られている。渦度が保存しないことが、これらの方程式に共通する重要なポイントで、このため数学的には解の爆発が起きる可能性が残されている。また空間次元が低い分、数学解析に都合がよいことが多い。この2点が最近この種の方程式が盛んに研究されてきた動機であろう。以下はその例である。

流れによって運ばれるスカラー θ を考え

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = 0 \quad (62)$$

これが、一般に流れ場の時間発展に影響するものとする

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = F(\theta, \nabla \theta) \quad (63)$$

このフィードバックのため、 θ はアクティブスカラーと呼ばれる。

5.2 磁気流体力学方程式 (MHD)

2次元磁気流体力学は、スカラー渦度 $\omega(\mathbf{x}, t)$, 磁気スカラーポテンシャル $a(\mathbf{x}, t)$ によって書き表せる。 $\mathbf{b} = \nabla^\perp a = (\partial_y a, -\partial_x a)$, $j = -\Delta a$ それぞれ磁場、電流である。基礎方程式は

$$\frac{D\omega}{Dt} = (\mathbf{b} \cdot \nabla) j, \quad (64)$$

$$\frac{Da}{Dt} = 0 \quad (65)$$

あるいは後の式は

$$\frac{D\mathbf{b}}{Dt} = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (66)$$

とかいてよい。これはアクティブスカラー a に対して

$$F = -(\nabla^\perp a \cdot \nabla) \Delta a$$

という選択をすることに対応する。

この方程式系の数値計算については、いくつか報告がある。最近の高精度計算 [GM1998] によれば、電流 Δa は高々時間の指数関数程度で増加することが報告されている。つまり爆発は起こりそうもない。

この種の結果を受けて、数学解析によって解の正則性を証明しようと試みがなされている。BKM 的規準は、3次元の場合を含めて [CKS97] に導かれている。2次元の場合の基準は次のようになる。 $t = T$ で爆発が起きるなら

$$\int_0^T (\|\omega\|_\infty + \|j\|_\infty) dt = \infty$$

でなければならない。この積分が、実際有界にとどまるか否か理論的には分っていない点は3次元 Euler 方程式の場合と同様である。

一方、数値実験結果を参考に流れのパターン仮定することで、特異点形成のシナリオを仮定し、その可能性を吟味する研究がある。例えば、[Klapper1998]では磁場のゼロ点に付加条件を加えて、また、[CM2000]では、双曲的サドルの場合に正則性を示している。他のシナリオでの解の爆発の有無については答えていないが、部分的な正則性の結果として意味がある。

5.3 Boussinesq 方程式

アクティブスカラー θ は温度である。基礎方程式は

$$\frac{D\theta}{Dt} = 0, \quad (67)$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \begin{pmatrix} 0 \\ \theta \end{pmatrix} \quad (68)$$

で、渦度は保存されない

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{\partial\theta}{\partial x}. \quad (69)$$

この方程式の場合は

$$F = \frac{\partial\theta}{\partial x}$$

という選択に対応する。

数学解析の第1歩としてBKM的規準は [ES1994]、[CN1997]によって導かれている。もし $t = T$ で特異点が発生するなら

$$\int_0^T |\omega|_\infty(t) dt = \infty$$

かつ

$$\int_0^T \int_0^t |\theta_x|_\infty(s) ds dt = \infty$$

でなければならない。この系は3次元軸対称流と軸を除いてほとんど同型の方程式であるため、多くの興味をもって研究されてきている。数値実験の報告としては [PS1992]、[ES1994] などがある。最近の高精度の計算からは、正則性を支持する結果の報告が多いようである。しかし、爆発の有無については、数値計算結果の解釈のレベルでもまだ確定していないようである。[TMMY2001, Ohkitani2002]

5.4 準地衡近似方程式

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial(\theta, \psi)}{\partial(x, y)} = 0 \quad (70)$$

$$\mathbf{u} = (-\Delta)^{-1/2} \nabla^\perp \theta \quad (71)$$

これは、渦度方程式の形に書くこともできるが、上の方が分りやすい。

この系は、3次元 Euler 方程式の Biot-Savart 則と類似する構造的な特徴を2次元で実現している。

数値計算としては、最初にこの系の爆発問題を取りあげた [CMT1994] ですでに報告がある。そこでは、有限時間での発散を示唆する結果が報告された。その後、より精度の高い数値実験によって [OY1997]、[CNS1999] で温度勾配は時間の2重指数関数で増加するという解釈が報告された。このことは、温度勾配は非常に急成長するが有限時間で爆発しないことを示唆している。Super-exponential な成長は有限時間における発散を意味しないことは言うまでもないが、このことを物理的に意味のある系で実現する、教訓的な例である。

数学解析として BKM 的な規準は [CMT1994] にある。

温度がサドル構造を持つ流れでは爆発は起こらないことが [Cordoba98] で証明された。粘性拡散項がある場合の流れの正則性は [CW1999] にある。

こうしてみると、スカラー渦度が保存しない流体方程式の研究において、相似性や流れのパターンなどを仮定して解の爆発を排除する議論がなされていて、これらの条件を取り除く努力が現在も行われているようである。

5.5 ストレッチ解

3次元空間において (x, y) 平面上 $[0, 2\pi]^2$ の領域で周期境界条件を課し、 z 方向には無限領域をとる。そのとき

$$\mathbf{U}(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x, y, t) \\ v(x, y, t) \\ z\gamma(x, y, t) \end{pmatrix}$$

という形の Euler 方程式の解のクラスを考える。2次元的な速度

$$\mathbf{u}(x, y, t) = (u(x, y, t), v(x, y, t))$$

および、渦度は

$$\omega(x, y, t) = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

である。これらの変数、およびストレイン γ は以下の偏微分方程式を満足する。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p, \quad (72)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = \gamma \omega, \quad (73)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \gamma = -\gamma^2 + 2 \langle \gamma^2 \rangle. \quad (74)$$

ここで $\langle \rangle \equiv \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{x}$ である。また、 $\text{div} \mathbf{u} = -\gamma$ であるため、2 次元的には速度は非圧縮性を持たないことに注意を要する。Lagrange 的に見れば方程式 (74) は γ について閉じている。その右辺第 2 項を無視すれば、 γ が有限時間で負の無限大に発散する解があることは明らかである。第 2 項は、空間積分を含む非局所的な項でこの単純な爆発メカニズムを抑制する働きをもつ。この競合の結果、解の発展は自明なものではなくなるため、この点を理解すべく、擬フーリエ・スペクトル法を用いた直接数値計算が [OG2000] で行われた。そこで取り上げられた初期条件は

$$\gamma_0 = \omega_0 = \sin x \sin y$$

である。最大で格子点数 2048^2 までの計算を行ったところ、 γ の最小値は有限時間で $-\infty$ へ発散することを示唆する結果が得られた。その発散時刻はおおよそ $t = 1.4$ と見積もられた。

この計算結果をふまえて、[Constantin2001] ではこのクラスの解で爆発することが証明された。これは変数変換により特性曲線法に帰着することが基本的なアイデアである。ここではその証明のスケッチを述べる。まず、

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \mathbf{v} \cdot \nabla \phi = -\phi^2, \quad (75)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = -\phi + \langle \phi \rangle, \quad \langle \phi_0 \rangle = 0.$$

という補助的な問題を考える。そして $\delta = \phi(\mathbf{x}, \tau) - \langle \phi \rangle$ と定義すると

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \delta = -\delta^2 + 2 \langle \delta \rangle - 2 \langle \phi \rangle \delta.$$

となる。ここで、変数変換 $(\mathbf{x}, \tau; \mathbf{v}, \delta) \longrightarrow (\mathbf{x}, t; \mathbf{u}, \gamma)$ を施せば、上の (74) に帰着する。

$$\frac{dt}{d\tau} = \exp \left(-2 \int_0^\tau \langle \phi \rangle ds \right), \quad t(0) = 0,$$

$$\gamma(\mathbf{x}, t) = \exp \left(2 \int_0^\tau \langle \phi \rangle ds \right) \delta(\mathbf{x}, \tau),$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \exp \left(2 \int_0^\tau \langle \phi \rangle ds \right) \mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau).$$

このことから、 γ の方程式は Lagrange 的に積分可能となり、最終的な結果は

$$\gamma(\mathbf{x}(\mathbf{a}, t), t) = \alpha(\tau(t)) \left(\frac{\gamma_0(\mathbf{a})}{1 + \tau(t)\gamma_0(\mathbf{a})} - \langle \phi(\tau(t)) \rangle \right), \quad (76)$$

$$\alpha(\tau(t)) = \left(\frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d\mathbf{a}}{1 + \tau(t)\gamma_0(\mathbf{a})} \right)^{-2}. \quad (77)$$

$$\langle \phi(\tau(t)) \rangle = \int \frac{\gamma_0(\mathbf{a}) d\mathbf{a}}{(1 + \tau(t)\gamma_0(\mathbf{a}))^2} \left(\int \frac{d\mathbf{a}}{1 + \tau(t)\gamma_0(\mathbf{a})} \right)^{-1}, \quad (78)$$

となる。

さて、数値計算によって得られた爆発の起きる時刻は正しいものであったのだろうか。このことを確かめるために

$$\exp \left(- \int_0^\tau \langle \phi \rangle(s) ds \right) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_Q \frac{1}{1 + \tau \phi_0(\mathbf{a})} d\mathbf{a},$$

を計算する。今の初期値に対しては

$$\int_0^{2\pi} dx \int_0^{2\pi} dy \frac{1}{1 + \tau \sin x \sin y}$$

を求めればよい。第 1 種完全楕円積分

$$K(\tau) = \int_0^{\pi/2} \frac{dy}{\sqrt{1 - \tau^2 \sin^2 y}},$$

を用いると、時間変数の変換は

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{4}{\pi^4} (K(\tau))^2,$$

ここで $t(0) = 0$ となる。この常微分方程式を数値的に積分すれば $t(1) = 1.41729...$ が得られる。この値は数値解の発散時刻に極めて近く、数値実験が正しく行われていたことを意味する。なお、厳密解によれば解の爆発が起きるとき、 γ の最小値が $-\infty$ に発散するのみならず、同時にその最大値も ∞ に発散することが分かる。この解のクラスの爆発の別証明としては [Malham2000] がある。この解のクラスは後に、磁気流体力学の場合にも拡張された。[GO2001] 数値実験の結果やはり、有限時間で解の発散が起きることを示している。しかし、この場合（2つの方向に進む Alfvén 波に対応して）特性曲線は 2 種類あるため、上で述べた方法はそのままでは適用できない。BKM 判定基準を拡張した定理は得られているが、爆発の証明はなされていない。

6 Cordoba-Fefferman の理論

この理論は流体力学方程式の性質を深く用いて得られた結果ではない。しかし、非圧縮な速度で流されるスカラーや構造に対して広く成り立つものなので知っておく価値はあろう。

6.1 2次元アクティブスカラー

渦度が保存されない流体方程式では、滑らかな初期条件から発展する流れに特異点が発生する可能が残される。これを完全に排除することは一般に難しいため、次善策として、数値実験などの観察からもっともらしい特異点発生シナリオを想定し、そのシナリオが爆発に繋がるか否かを解析的に研究する立場がある。

ここでは、そのような取り組みの1つとして2次元のアクティブスカラーの問題を取り上げる [CF2002a]。

スカラー場に対するレベルセット（等高線）に注目する。 $0 \leq t < T$ となる時間 t に対して、2つのレベルセット

$$\Gamma_{\pm} = \{(x_1, x_2) | x_2 = f_{\pm}(x_1, t), x_1 \in [a, b]\}$$

を考える。ここで

$$f_{\pm} \in C^1([a, b] \times [0, T]),$$

$$f_{-}(x_1, t) < f_{+}(x_1, t), \forall x_1 \in [a, b], t \in [0, T]$$

である。 Γ_{\pm} は定義により流体と共に動く

$$\frac{D}{Dt}(f_{\pm} - x_2) = 0,$$

つまり

$$u_2(x_1, x_2, t) = \frac{\partial f_{\pm}(x_1, t)}{\partial x_1} u_1(x_1, x_2, t) + \frac{\partial f_{\pm}(x_1, t)}{\partial t} \text{ at } x_2 = f_{\pm}(x_1, t)$$

が成り立つ。ここで $t = T$ で sharp front をなすというシナリオを考える。これは Γ_{\pm} が合体して

$$\lim_{t \rightarrow T} (f_{+}(x_1, t) - f_{-}(x_1, t)) = 0, \forall x_1 \in [a, b],$$

$$|f_{+}(x_1, t) - f_{-}(x_1, t)| < \infty \forall x_1 \in [a, b], t \in [0, T]$$

となることである。（図5、6）

さて、このシナリオを吟味するため、最大速度

$$U(t) \equiv \sup |u(x_1, x_2, t)|_{x_1 \in [a, b], f_{-}(x_1, t) \leq x_2 \leq f_{+}(x_1, t)}$$

を定義する。

定義 $u_2 = \frac{Dx_2}{Dt}$ より明らかに

$$\frac{\partial f_{\pm}}{\partial t}(x_1, t) = \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x_1, f_{\pm}(x_1, t), t)$$

が成り立つ。これに注意すると以下のことが示せる。

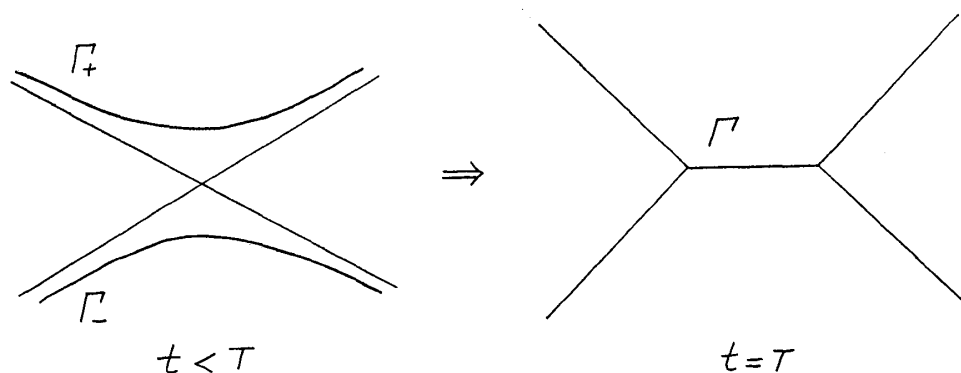


図 5: 2D スカラー爆発のシナリオ

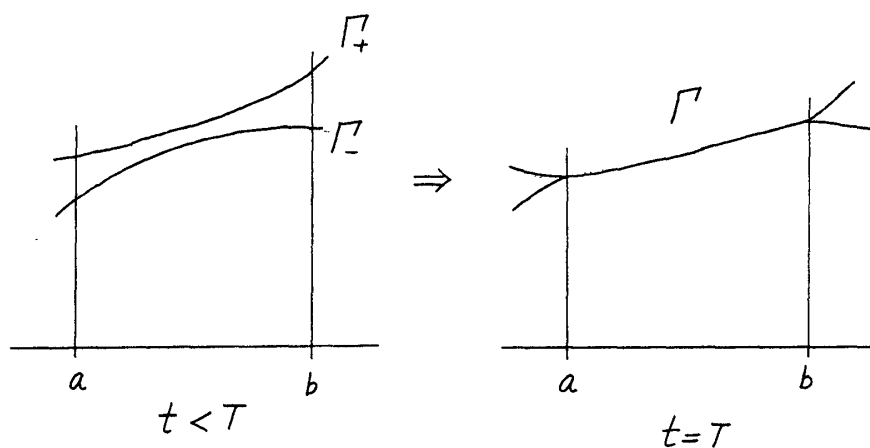


図 6: 2D スカラー爆発のシナリオ

Theorem 6.1. $\int_0^T U(t)dt < \infty$ であるならば $t = T$ まで *sharp fronts* は発生しない。

Proof. 背理法による。 $t = T$ で *sharp front* ができたとして、次の面積を考える：

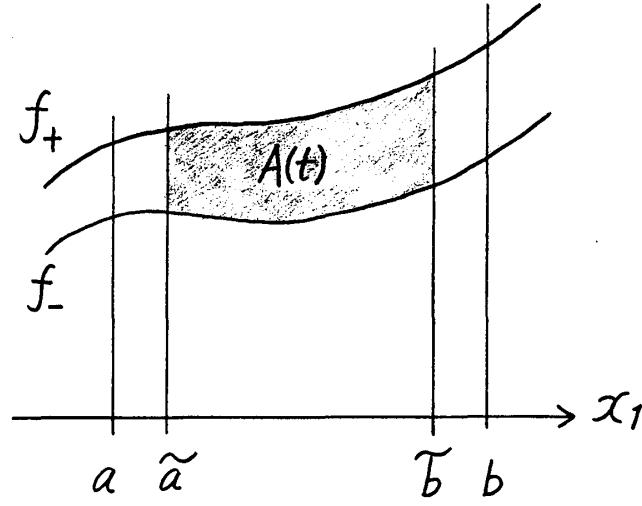
$$A(t) \equiv \int_{\tilde{a}(t)}^{\tilde{b}(t)} (f_+(x_1, t) - f_-(x_1, t)) dx_1$$

ここで、仮定により適当な $t^* \in [0, T)$ に対して

$$\tilde{a}(t), \tilde{b}(t) \in [a, b], \forall t \in [t^*, T)$$

を選んで

$$\begin{cases} \tilde{a}(t) = a + \int_t^T \sup |u(x_1, x_2, s)| ds, \\ \tilde{b}(t) = b - \int_t^T \sup |u(x_1, x_2, s)| ds. \end{cases}$$

図 7: 面積 $A(t)$

とすることができる事を用いた。

\sup は、 $x_1 \in [a, b], f_-(x_1, t) \leq x_2 \leq f_+(x_1, t)$ の条件下でとるものとする。さて、面積 $A(t)$ の時間変化を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= U(t) \underbrace{(f_+(\tilde{b}(t), t) - f_-(\tilde{b}(t), t))}_{\equiv \delta(\tilde{b}) > 0} + U(t) \underbrace{(f_+(\tilde{a}(t), t) - f_-(\tilde{a}(t), t))}_{\equiv \delta(\tilde{a}) > 0} \\ &\quad + \int_{\tilde{a}(t)}^{\tilde{b}(t)} \frac{\partial}{\partial t} (f_+(x_1, t) - f_-(x_1, t)) dx_1 \end{aligned}$$

この最後の項は、

$$\begin{aligned} &= [\psi(x_1, f_+(x_1, t), t) - \psi(x_1, f_-(x_1, t), t)]_{x_1=\tilde{a}(t)}^{\tilde{b}(t)} \\ &= \left[(f_+(x_1, t) - f_-(x_1, t)) \underbrace{\frac{\partial \psi(x, \eta, t)}{\partial x_2}}_{=-u_1(x, \eta, t)} \right]_{x_1=\tilde{a}(t)}^{\tilde{b}(t)} \\ &= \underbrace{(f_+(\tilde{a}(t), t) - f_-(\tilde{a}(t), t))}_{=\delta(\tilde{a})} u_1(\tilde{a}, \eta(\tilde{a}), t) - \underbrace{(f_+(\tilde{b}(t), t) - f_-(\tilde{b}(t), t))}_{=\delta(\tilde{b})} u_1(\tilde{b}, \eta(\tilde{b}), t). \end{aligned}$$

したがって

$$\frac{dA}{dt} = \underbrace{(U(t) - u_1)}_{>0} \delta(\tilde{b}) + \underbrace{(U(t) + u_1)}_{>0} \delta(\tilde{a}) \geq 0, \quad \forall t^* \leq t < T.$$

$t \rightarrow T - 0$ のとき

$$\int_a^b (f_+ - f_-) dx_1 \geq A(t) \geq A(t^*) > 0.$$

これは、 $t = T$ における sharp front の形成に矛盾する。 \square

さらに Cordoba-Fefferman は、この結果をより精密にし、スカラー勾配の成長を評価する研究を行った [CF2002b]。

$$\theta(x_1, f_\rho(x_1, t), t) = G(\rho)$$

となるレベルセットを

$$x_2 = f_\rho(x_1, t) \text{ for } x_1 \in [a, b], f_\rho \in C^1([a, b] \times [0, T^*])$$

と書こう。

Uniform collapse とは 2 つのレベルセットがある有限区間で $t \rightarrow t^*$ のとき

$$f_{\rho_2}(x_1, t) - f_{\rho_1}(x_1, t) \approx \frac{1}{b-a} \int_a^b (f_{\rho_2}(x_1, t) - f_{\rho_1}(x_1, t)) dx_1$$

となることである。

Front の厚みを $\delta(x_1, t) \equiv |f_{\rho_2}(x_1, t) - f_{\rho_1}(x_1, t)|$ と定義する。semi-uniform collapse とは

$$\min \delta(x_1, t) \geq c \max \delta(x_1, t) \text{ for } a \leq x_1 \leq b, \forall t \in [0, t^*)$$

となることである。

Theorem 6.2. 準地衡近似方程式では、厚みは

$$\delta(t) > \exp(-\exp(At + B))$$

となる。

Theorem 6.3. 2次元 Euler 方程式では、厚みは

$$\delta(t) > \exp(-(At + B))$$

となる。

証明は、原論文を参照のこと。

6.2 渦管のシナリオ

以上の、2次元のアクティブスカラーの理論は、3次元流体にも拡張されている。ここでは、断面積が時間と共に収縮する渦管が、特異点形成の候補となるか否かを検討している。[CF2001]

Theorem 6.4. 非圧縮な速度 $u(x, t)$ によって移流される、正則な渦管を考える。 $\int_0^T |u| dt < \infty$ であるならば $t = T$ まで渦管の体積 $V(t)$ は

$$\lim_{t \rightarrow T-0} V(t) > 0$$

を満たす。

したがって、有限時間で渦管の断面積が0となり、線分になってしまうことはあり得ない。証明は上の2次元の理論と類似しているので、ここでは省略する。

7 付記

ここでは触れることができなかったが、渦運動力学の関連する問題として、Contour dynamics, Birkhoff-Rott 問題などがある。これらについては[Majda1991, Constantin1994, MB2002]などをご覧ください。

原稿に関して、有益なコメントをいただいた、松本 剛氏、武末 真二 氏に感謝します。

参考文献

- [Weisacker1948] C.F.v. Weizsäcker, “Das spectrum der turbulenz bei grossen Reynoldsschen Zahlen,” Z. Phys. **124**, 614-627.
- [Onsager1945] L. Onsager, The distribution of energy in turbulence, Phys. Rev. **68** (1945), 286.
- [Onsager1949] L. Onsager, Statistical Hydrodynamics, Nuovo. Cim. Suppl. **6** (1949), 279-287.
- [Eyink1994] G. L. Eyink, Energy dissipation without viscosity in ideal hydrodynamics I. fourier analysis and local energy transfer, Physica D **78** (1994), 222-240.
- [SF1975] P.L. Sulem and U. Frisch, “Bounds on energy flux for finite energy turbulence,” J. Fluid Mech. **72** (1975), 417-423.

- [CET1994] P. Constantin, W. E and E. Titi, Onsager's conjecture on the energy conservation for solutions of Euler's equations, *Commun. Math. Phys.* **165** (1994), 207-209.
- [DR2000] J. Duchon and R. Robert, Inertial energy dissipation for weak solutions of incompressible Euler and Navier-Stokes equations, *Nonlinearity* **13** (2000), 249-255.
- [Eyink2003] G. L. Eyink, Local 4/5-law and energy dissipation anomaly in turbulence, *Nonlinearity* **16** (2003), 137-145.
- [Moffatt1969] H. K. Moffatt, The degree of knottedness of tangled vortex lines, *J. Fluid Mech.* **35**, 117-129.
- [Ohkitani2004a] K. Ohkitani, "Vortex structure and local helicity in turbulence", in preparation.
- [Ohkitani2004b] K. Ohkitani, "Balance between stretching and viscous diffusion of vorticity in Navier-Stokes turbulence", in preparation.
- [Carstoiu1946] I. Cârstoiu, "Généralisation des formules de Helmholtz et de Cauchy pour un fluide visqueux incompressible," *C. R. Acad. Sci. Paris* **223** (1946), 1095-96.
- [Constantin2001] P. Constantin, An Eulerian-Lagrangian Approach to the Navier-Stokes Equations, *Commun. Math. Phys.* **216**, 663.
- [Constantin2003] P. Constantin, Near identity transformations for the Navier-Stokes equations in *Handbook of Mathematical Fluid Dynamics* (ed. S. Friedlander, D. Serre). vol. 2, pp. 117-141. Elsevier.
- [OC2003] K. Ohkitani and P. Constantin, Numerical study of the Eulerian-Lagrangian formulation of the Navier-Stokes equations, *Phys. Fluids* **15** (2003), 3251-3254.
- [BKM1984] J. T. Beale, T. Kato and A. Majda, "Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3-D Euler equations," *Commun. Math. Phys.* **94** (1984), 61.
- [DG1995] C. R. Doering and J. D. Gibbon, *Applied Analysis of the Navier-Stokes Equations*, Cambridge Univ. Press (1995).
- [Constantin1994] P. Constantin, "Geometric statistics in turbulence," *SIAM Review* **36** (1994), 73.
- [CFM1996] P. Constantin, Fefferman, C. and A. Majda, Geometric constraints on potentially singular solutions for the 3-D Euler equations, *Commun. Part. Diff. Eq.* **21** (1996), 559-571.

- [PS1987] A. Pumir and E.D. Siggia, Vortex dynamics and the existence of solutions to the Navier-Stokes equations, *Phys. Fluids* **30** (1987), 1606-1626.
- [PS1985] E.D. Siggia and A. Pumir, Incipient singularities in the Navier-Stokes equations, *Phys. Rev. Lett.* **55** (1985), 1749-1752.
- [PS1990] A. Pumir and E.D. Siggia, Collapsing solutions to 3-D Euler equations, *Phys. Fluids* **2** (1990), 220-241.
- [Kerr1983] R.M. Kerr, Evidence for a singularity of the three-dimensional, incompressible Euler equations, *Phys. Fluids A* **5** (1993), 1725-1746.
- [Moffatt2000] H. K. Moffatt, The interaction of skewed vortex pairs: a model for blow-up of the Navier-Stokes equations, *J. Fluid Mech.* **409** (2000), 51-68.
- [NRS1996] J. Nečas, M. Růžička and V. Šverák, "On Leray's self-similar solutions of the Navier-Stokes equations," *Acta. Math.* **176** (1996), 283-294.
- [Tsai1998] T.-P. Tsai, "On Leray's self-similar solutions of the Navier-Stokes equations satisfying local energy estimates," *Arch. Rat. Mach. Anal.* **143** (1998), 29-51. Erratum **147** (1999), 363.
- [Leray1934] J. Leray, "Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace," *Acta Math* **63** (1934), 193.
- [Moffatt2001] H. K. Moffatt, The topology of turbulence, in *New trends in turbulence* NATO ASI, eds. M. Lesieur, A. Yaglom and F. David. EDP Sciences and Springer, 2001.
- [CK2000] G.-H. Cottet and P.D. Koumoutsakos, 'Vortex Methods: Theory and Practice', 2000, New York, Cambridge University Press.
- [Pelz1997] R. B. Pelz, Locally self-similar, finite-time collapse in a high-symmetry vortex filament model, *Phys. Rev. E* **55** (1997), 1617-1626.
- [GP2000] J. M. Green and R. B. Pelz, Stability of postulated, self-similar, hydrodynamic blowup solutions, *Phys. Rev. E* **62** (2000), 7982-7986.
- [Pelz2001a] R. B. Pelz, Symmetry and the hydrodynamic blowup problem, *J. Fluid Mech.* **444** (2001), 299-320.
- [Pelz2001b] R. B. Pelz, Analysis of a candidate flow for hydrodynamic blowup, in *Introduction to the Geometry and Topology of Fluid Flow*, ed. R.L. Ricca, Kulwer 2001.

- [RS1978] H.A. Rose, and P.L. Sulem, Fully developed turbulence and statistical mechanics, J. Phys. (France) **39** (1978), 441.
- [Majda86] A. Majda, Vorticity and the mathematical theory of incompressible fluid flow, Comm. Pure Appl. Math. vol. 39 (1986), S187-S220.
- [CKS97] R.E. Caflisch, I. Klapper and G. Steele, 'Remarks on singularities, dimension and energy dissipation for ideal hydrodynamics and MHD,' Commun. Math. Phys. **184** (1997), 443.
- [GM1998] R. Grauer and C. Marliani, "Geometry of singular structures in magnetohydrodynamic flows," Phys. Plasmas **5** (1998), 2544.
- [Klapper1998] I. Klapper, "Constraints on finite-time current sheet formation at null points in two-dimensional ideal incompressible magnetohydrodynamics," Phys. Plasmas **5** (1998), 910.
- [CM2000] D. Cordoba and C. Marliani, "Evolution of current sheets and regularity of ideal incompressible magnetic fluids in 2D," Commun. Pure Appl. Math. **53** (2000), 512.
- [PS1992] A. Pumir and E.D. Siggia, "Development of singular solutions to the axisymmetric Euler equations," Phys. Fluids A **4** (1992), 1772.
- [ES1994] W. E and Ch.-W. Shu, "Small-scale structures in Boussinesq convection," Phys. Fluids **6** (1994), 49.
- [CN1997] D. Chae, H.-S. Nam, "Local existence and blow-up criterion for the Boussinesq equations," Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **127** (1997), 935.
- [TMMY2001] Toh, S., Matsumoto T., Miyashita H. and Yamada, Y. Intermittency and singularity in an active scalar turbulence – *finite time singularity in the two-dimensional ideal Boussinesq approximation equations*– (in Japanese), *Reports of RIAM Symposium, No.12 ME-S1* (2001), 20.
- [Ohkitani2002] K. Ohkitani "Comparison between the Boussinesq and coupled Euler equations in two dimensions". in *Proceedings of Tosio Kato's Method and Principle for Evolution Equations in Mathematical Physics*, pp.127-145, University of Tokyo Press, Tokyo, 2002.
- [CMT1994] P. Constantin, A. J. Majda and E. G. Tabak, "Formation of strong fronts in the 2-D quasigeostrophic thermal active scalar," Nonlinearity **7** (1994), 1995.

- [OY1997] K. Ohkitani, and M. Yamada, Inviscid and inviscid-limit behavior of a surface quasi-geostrophic flow, *Phys. Fluids*. **9** (1997), 876-882.
- [CNS1999] P. Constantin, Q. Nie and N. Schörghofer, “Front formation in an active scalar equation,” *Phys. Rev.* **60** (1999), 2858.
- [CW1999] P. Constantin and J. Wu, “Behavior of solutions of 2D quasi-geostrophic equations,” *SIAM J. Math. Anal.* **30** (1999), 937.
- [OG2000] K. Ohkitani and J.D. Gibbon, “Numerical study of singularity formation in a class of Euler and Navier-Stokes flows,” *Phys. Fluids* **12** (2000), 3181.
- [Malham2000] S.J.A. Malham (2000). Collapse of a class of three-dimensional Euler vortices, *Proc. R. Soc. Lond. A* **456** (2000), 2823-2833; **Erratum** *Proc. R. Soc. Lond. A* **457** (2001), 3052.
- [GO2001] J.D. Gibbon and K. Ohkitani, “Singularity formation in a class of stretched solutions of the equations for ideal MHD”, *Nonlinearity* **14** (2001), 1239-1264.
- [Cordoba98] D. Cordoba, “Nonexistence of simple hyperbolic blow-up for the quasi-geostrophic equation,” *Ann. Math.* **148** (1998), 1135.
- [CF2002a] Cordoba, D. and Fefferman, C.(2002). Scalars convected by a 2D incompressible flow, *Commun. Pure Appl. Math.* **55**, 225.
- [CF2002b] Cordoba, D. and Fefferman, C.(2002). Growth of solutions for QG and 2D Euler equations, *J. Amer. Math. Soc.* **15**, 665.
- [CF2001] D. Cordoba and C. Fefferman, “On the collapse of tubes carried by 3D incompressible flows,” *Commun. Math. Phys.* **222** (2001), 293-298.
- [Majda1991] A. Majda, “Vorticity, turbulence, and acoustics in fluid flow,” *SIAM Review* **33** (1991), 349.
- [MB2002] *Vorticity and Incompressible Flow*, A.J. Majda and A.L. Bertozzi, Cambridge University Press, 2002.